PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

SEPTIEMBRE – 2011 (GENERAL)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Determina el valor del parámetro $\alpha \in R$, para que la función $f(x)=(x-a)e^x$ tenga un mínimo relativo en x = 0. Razona que, de hecho, es un mínimo absoluto.

b) Para el valor de α obtenido, calcula los puntos de inflexión de la función f(x).

----

a)

Para que una función tenga un punto relativo para un determinado valor de x es necesario que se anule la derivada para ese valor y que la segunda derivada sea positiva.

$$f'(x)=1\cdot e^x+(x-a)\cdot e^x=\underline{e^x(x-a+1)=f'(x)}.$$

$$f'(0)=0 \Rightarrow e^0(0-a+1)=0 \;;;\; 1\cdot(1-a)=0 \Rightarrow \underline{a=1} \Rightarrow \underline{f(x)=e^x(x-1)} \;;;\; \underline{f'(x)=xe^x}.$$

$$f''(x)=e^x+x\cdot e^x=\underline{e^x(x+1)=f''(x)}.$$

$f''(0)=e^0(0+1)=1>0 \Rightarrow$ Mínimo relativo para α = 1.

Para justificar que se trata de un mínimo absoluto tenemos en cuenta que la función $f(x)=(x-1)e^x$ es continua en su dominio, que es R, y que para x < 0 es $f'(x)<0$ y para x > 0 es $f'(x)>0$, lo que justifica la condición de que el mínimo es absoluto.

b)

Una función tiene un punto de inflexión para los valores que anulan la segunda derivada y hacen distinta de cero a la tercera derivada.

$$f''(x)=0 \Rightarrow e^x(x+1)=0 \Rightarrow \underline{x=-1}.$$

$$f'''(x) = e^x(x+1) + e^x = \underline{e^x(x+2) = f'''(x)}.$$

$$f'''(-1) = e^{-1}(-1+2) = \frac{1}{e} \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{\text{P. I. para x = -1}}.$$

$$f(-1) = (-1-1)e^{-1} = -\frac{2}{e} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\ I. \Rightarrow A\left(-1,\ -\frac{2}{e}\right)}}.$$

****

2º) Calcula la integral $I=\int \frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\cdot dx$.

La resolución por Ruffini la ecuación $x^3-5x^2+8x-4=0$ es la siguiente:

	1	-5	8	-4
1		1	-4	4
	1	-4	4	$\boxed{0}$
2		2	-4	
	1	**-2**	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

$$I=\int \frac{x^2-3x+1}{x^3-5x^2+8x-4}\cdot dx=\int \frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)^2}\cdot dx.$$

$$\frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}=\frac{A\cdot(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}=$$

$$=\frac{A\cdot\left(x^2-4x+4\right)+B\left(x^2-3x+2\right)+C(x-1)}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{x^2(A+B)+x(-4A-3B+C)+(4A+2B-C)}{(x-1)(x-2)^2}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} A+B=1 \\ \Rightarrow -4A-3B+C=-3 \\ 4A+2B-C=1 \end{array}\right\}\Rightarrow -B=-2\ ;;\ \underline{B=2}\ ;;\ \underline{A=-1}\ ;;\ -4+4-C=1\ ;;\ \underline{C=-1}.$$

$$I=\int \frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)^2}\cdot dx=\int\left[-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right]\cdot dx=-L|x-1|+2L|x-2|-\int\frac{dx}{(x-2)^2}=$$

$$=L\frac{(x-2)^2}{|x-1|}-\int(x-2)^{-2}\cdot dx=L\frac{(x-2)^2}{|x-1|}-\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+K=\underline{\underline{L\frac{(x-2)^2}{|x-1|}+\frac{1}{x-2}+K=I}}.$$

****

3º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & k\\ 1 & 4 & k\\ 0 & 5k & 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ y $O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular en función del parámetro $k \in R$ el rango de la matriz A.

b) ¿Existe algún valor de $k \in R$ para el cual el sistema A · X = O sea compatible?

c) ¿Para qué valores de $k \in R$ el sistema A · X = O es compatible indeterminado?

----

a)

Teniendo en cuenta que $F_2 = F_1 + F_3$, el rango de la matriz A es el mismo que el rango de la matriz M que resulta de eliminar una de las tres primeras filas, por ejemplo la segunda: $M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 4 & k\\ 0 & 5k & 1\end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 4 & k\\ 0 & 5k & 1\end{vmatrix} = 4-5k^2+1 = 5-5k^2 = 5\left(1-k^2\right) = 0 \Rightarrow \underline{k_1=-1} \;;;\; \underline{k_2=1}.$$

$$\underline{\underline{Para \left\{\begin{matrix}k \neq -1\\ k \neq 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ \ A = 3.}} \quad \underline{\underline{Para \left\{\begin{matrix}k = -1\\ k = 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ \ A = 2}}$$

b)

El sistema A · X = O es equivalente al sistema M · X = O.

Teniendo en cuenta que todo sistema lineal homogéneo es compatible:

$$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ A \cdot X = O\ \ es\ \ compatible\ \ \forall k \in R}}$$

c)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada (en el caso de sistemas homogéneos son equivalentes) son iguales y menor que el número de incógnitas, por lo cual:

<u>El sistema A · X = O es compatible indeterminado para k = -1 y para k = 1</u>

****

4º) Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x-y=1\\ y+z=1\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}$, $t\in R$, se pide:

a) Determina su posición relativa.

b) Halla el ángulo que forman sus vectores de dirección.

----

a)

La expresión de s por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$s\equiv\begin{cases}x=t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1} \Rightarrow s\equiv\begin{cases}-x=y-1\\ x=z\end{cases} ;;\ \underline{r\equiv\begin{cases}x+y-1=0\\ x-z=0\end{cases}}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\left.\begin{matrix}x-y=1\\ y+z=1\\ x+y=1\\ x-z=0\end{matrix}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{matrix}x-y=1\\ y+z=1\\ x+y=1\end{matrix}\right\}$, teniendo en cuenta que la suma de las ecuaciones segunda y cuarta es igual a la tercera.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

Rango de M $\Rightarrow \begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0 \Rightarrow$ Rango M = 3.

<u>Rango M = Rango M' = 3 → Las rectas r y s se cortan en un punto.</u>

b)

El vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1,\ -1,\ 0)$ y $\overrightarrow{n_2} = (0,\ 1,\ 1)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i + k - j = -i - j + k = (-1,\ -1,\ 1) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ -1)}.$$

El vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (1,\ -1,\ 1)$.

El ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}$; aplicando la fórmula a los vectores que nos ocupan:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{(1,\ 1,\ -1) \cdot (1,\ -1,\ 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1-1-1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \underline{\alpha = 109^o\ \ 28'\ 16''}.$$

****

PROPUESTA B

1º) a) Enuncia el teorema de Bolzano y el teorema de Rolle.

b) Demuestra que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ tiene al menos una solución real.

c) Demuestra que, de hecho, dicha solución es única.

----

a)

El teorema de Bolzano dice que "si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c) = 0$".

El teorema de Rolle se puede enunciar del modo siguiente:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b) y si se cumple que f(a) = f(b), existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ tal que f'(x) = 0.

b)

Consideremos la función $f(x) = e^x + x^7$, que es continua y derivable en su dominio, que es R.

Considerando el intervalo $[-1,\ 1]$ se observa lo siguiente:

$$f(-1) = e^{-1} + (-1)^7 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \ \ ;; \ \ f(1) = e^1 + 1^7 = e + 1 > 0 .$$

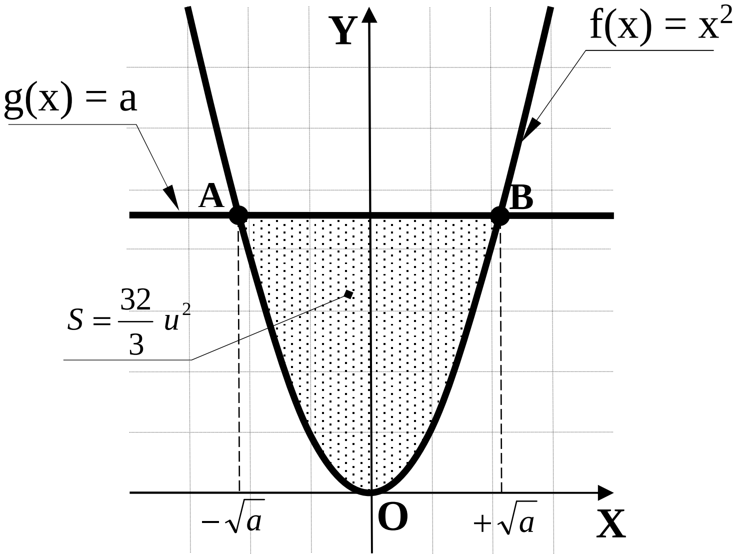
Según el teorema de Bolzano, en el intervalo $[-1,\ 1]$ la función se anula por lo menos una vez, lo cual implica que la ecuación $e^x + x^7 = 0$ <u>tiene al menos una solución real, como teníamos que demostrar.</u>

c)

Una forma de demostrar que la solución es única es la siguiente: la función $f(x) = e^x + x^7$ puede considerarse como la suma de las funciones $g(x) = e^x$ y $h(x) = x^7$, que son ambas monótonas en R, por lo que la función $f(x) = e^x + x^7$ es, lógicamente, monótona creciente en R, <u>lo cual demuestra que la solución demostrada en el apartado anterior es única.</u>

****

2º) Sean las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a$, con $a\in R$, $a>0$. Calcula el valor del parámetro α para que el área encerrada entre las gráficas de las funciones f(x) y g(x) sea $\frac{32}{3}$.



Los puntos de corte A y B de las dos funciones, tienen como abscisas las soluciones del sistema formado por ambas, que son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=a \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=a \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{x_1=-\sqrt{a}} \\ \underline{x_2=+\sqrt{a}} \end{array}\right.$$

Por la simetría de la curva, se tiene:

$$S=2\cdot\int_0^{\sqrt{a}}\left(a-x^2\right)\cdot dx=2\cdot\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{32}{3}\ u^2\ \ ;;\ 6\cdot\left[\left(a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}\right)-0\right]=32\ \ ;;$$

$$\frac{12a\sqrt{a}}{3}=32\ \ ;;\ a\sqrt{a}=8\ \ ;;\ a^{\frac{3}{2}}=2^3\ \ ;;\ a=2^2=\underline{\underline{4\ u=a}}\ .$$

****

3º) a) Clasifica, en función del valor del parámetro $m \in R$, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ x + 2y + mz = m + 3 \end{cases}$.

b) Resuélvelo, si es posible, para m = 7.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & m & m+3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M es: $|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -3m + 4 + 3 + 2m = -m + 7 = 0 \Rightarrow \underline{m = 7}$.

$$\underline{\underline{Para \;\; m \neq 7 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 3 = n^{o} \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; Determinado}}$$

Ahora vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada M' para m = 7.

$$Para \;\; m = 7 \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 7 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 + C_2 + C_3 = C_4\} \Rightarrow \underline{Rango \;\; M' = 2}.$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m = 7 \;\Rightarrow\; Rango \;\; M = Rango \;\; M' = 2 < n^{o} \;\; incóg. \;\Rightarrow\; Compatible \;\; indeterminado}}$$

b)

Para m =7 el sistema resulta $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ x + 2y + 7z = 10 \end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y haciendo <u>z = λ</u>:

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 1 - \lambda \\ 2x - 3y = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - 2y = 2 - 2\lambda \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = 3 - 2\lambda} \;\; ;; \;\; x = 1 - \lambda + y = 1 - \lambda + 3 - 2\lambda = \underline{4 - 3\lambda = x}.$$

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x = 4 - 3\lambda \\ y = 3 - 2\lambda, \;\; \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****

4º) Consideremos el plano $\pi \equiv x - ky = 0$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

a) Hallar el valor del parámetro $k \in R$ para que el plano π y la recta r sean paralelos.

b) Para el valor de k obtenido, calcula la distancia desde la recta r al plano π.

----

a)

Una forma de resolver éste apartado es el siguiente: para que el plano π y la recta r sean paralelos es necesario que el vector director de la recta sea perpendicular al vector normal al plano.

El vector director de la recta es cualquier vector que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que determinan a la recta, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{v'_r} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -j - k - k - i = -i - j - 2k = (-1,\ -1,\ -2) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 2)}.$$

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (1,\ -k,\ 0)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (1,\ 1,\ 2) \cdot (1,\ -k,\ 0) = 1 - k + 0 = 0 \Rightarrow \underline{k = 1}.$$

<u>La recta r y el plano π son paralelos para k = 1.</u>

b)

Para k = 1 el plano es $\pi \equiv x - y = 0$.

La distancia de la recta r al plano π es equivalente a la distancia de un punto de la recta al plano. Un punto de la recta r es, por ejemplo, A(2, 1, 0).

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la formula al plano $\pi \equiv x - y = 0$ y al punto A(2, 1, 0) :

$$d(A,\ \pi) = \frac{|1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{|2 - 1 + 0 + 0|}{\sqrt{1 + 1 + 0}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades = d(r,\ \pi)}}.$$

****